

$x = \mp \sqrt{1 - y^2} + 1$ . Мұның геометриялық кескіні –  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  шеңберінің сол немесе оң жақ жартысы.

Ескерту. 10.6.2. п. в) жағдайының мысалын қараңыз. ◀

### 10.3–ҮТ

*Дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін табу керек.*

#### 1.

- 1.1. а)  $y'' + 4y = 0$ ; б)  $y'' - 10y' + 25y = 0$ ; в)  $y'' + 3y' + 2y = 0$ .  
1.2. а)  $y'' - y' - 2y = 0$ ; б)  $y'' + 9y = 0$ ; в)  $y'' + 4y' + 4y = 0$ .  
1.3. а)  $y'' - 4y' = 0$ ; б)  $y'' - 4y' + 13y = 0$ ; в)  $y'' - 3y' + 2y = 0$ .  
1.4. а)  $y'' - 5y' + 6y = 0$ ; б)  $y'' + 3y' = 0$ ; в)  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .  
1.5. а)  $y'' - 2y' + 10y = 0$ ; б)  $y'' + y' - 2y = 0$ ; в)  $y'' - 2y' = 0$ .  
1.6. а)  $y'' - 4y = 0$ ; б)  $y'' + 2y' + 17y = 0$ ; в)  $y'' - y' - 12y = 0$ .  
1.7. а)  $y'' + y' - 6y = 0$ ; б)  $y'' + 9y' = 0$ ; в)  $y'' - 4y' + 20y = 0$ .  
1.8. а)  $y'' - 49y = 0$ ; б)  $y'' - 4y' + 5y = 0$ ; в)  $y'' + 2y' - 3y = 0$ .  
1.9. а)  $y'' + 7y' = 0$ ; б)  $y'' - 5y' + 4y = 0$ ; в)  $y'' + 16y = 0$ .  
1.10. а)  $y'' - 6y' + 8y = 0$ ; б)  $y'' + 4y' + 5y = 0$ ; в)  $y'' + 5y' = 0$ .  
1.11. а)  $4y'' - 8y' + 3y = 0$ ; б)  $y'' - 3y' = 0$ ; в)  $y'' - 2y' + 10y = 0$ .  
1.12. а)  $y'' + 4y' + 20y = 0$ ; б)  $y'' - 3y' - 10y = 0$ ; в)  $y'' - 16y = 0$ .  
1.13. а)  $9y'' + 6y' + y = 0$ ; б)  $y'' - 4y' - 21y = 0$ ; в)  $y'' + y = 0$ .  
1.14. а)  $2y'' + 3y' + y = 0$ ; б)  $y'' + 4y' + 8y = 0$ ; в)  $y'' - 6y' + 9y = 0$ .  
1.15. а)  $y'' - 10y' + 21y = 0$ ; б)  $y'' - 2y' + 2y = 0$ ; в)  $y'' + 4y' = 0$ .  
1.16. а)  $y'' + 6y' = 0$ ; б)  $y'' + 10y' + 29y = 0$ ; в)  $y'' - 8y' + 7y = 0$ .  
1.17. а)  $y'' + 25y = 0$ ; б)  $y'' + 6y' + 9y = 0$ ; в)  $y'' + 2y' + 2y = 0$ .  
1.18. а)  $y'' - 3y' = 0$ ; б)  $y'' - 7y' - 8y = 0$ ; в)  $y'' + 4y' + 13y = 0$ .

- 1.19. а)  $y'' - 3y' - 4y = 0$ ; б)  $y'' + 6y' + 13y = 0$ ; в)  $y'' + 2y' = 0$ .
- 1.20. а)  $y'' + 25y' = 0$ ; б)  $y'' - 10y' + 16y = 0$ ; в)  $y'' - 8y' + 16y = 0$ .
- 1.21. а)  $y'' - 3y' - 18y = 0$ ; б)  $y'' - 6y' = 0$ ; в)  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .
- 1.22. а)  $y'' - 6y' + 13y = 0$ ; б)  $y'' - 2y' - 15y = 0$ ; в)  $y'' - 8y' = 0$ .
- 1.23. а)  $y'' + 2y' + y = 0$ ; б)  $y'' + 6y' + 25y = 0$ ; в)  $y'' - 4y' = 0$ .
- 1.24. а)  $y'' + 10y' = 0$ ; б)  $y'' - 6y' + 8y = 0$ ; в)  $4y'' + 4y' + y = 0$ .
- 1.25. а)  $y'' + 5y = 0$ ; б)  $9y'' - 6y' + y = 0$ ; в)  $y'' + 6y' + 8y = 0$ .
- 1.26. а)  $y'' + 6y' + 10y = 0$ ; б)  $y'' - 4y' + 4y = 0$ ; в)  $y'' - 5y' + 4y = 0$ .
- 1.27. а)  $y'' - y = 0$ ; б)  $4y'' + 8y' - 5y = 0$ ; в)  $y'' - 6y' + 10y = 0$ .
- 1.28. а)  $y'' + 8y' + 25y = 0$ ; б)  $y'' + 9y' = 0$ ; в)  $9y'' + 3y' - 2y = 0$ .
- 1.29. а)  $6y'' + 7y' - 3y = 0$ ; б)  $y'' + 16y = 0$ ; в)  $4y'' - 4y' + y = 0$ .
- 1.30. а)  $9y'' - 6y' + y = 0$ ; б)  $y'' + 12y' + 37y = 0$ ; в)  $y'' - 2y' = 0$ .

2. СЫЗЫҚТЫҚ БІРТЕКТІ ТЕНДЕУДІҢ ДЕРБЕС ШЕШІМІН ТАБУ КЕРЕК.

2.1.  $y''' - 7y'' + 6y' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 30$ .

(Жауабы:  $y = 5 - 6e^x + e^{6x}$ .)

2.2.  $y^{IV} - 9y''' = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y''(0) = 0$ ,  $y'''(0) = 0$ ,  $y^{IV}(0) = 0$ .

(Жауабы:  $y = 1 - x$ .)

2.3.  $y''' - y'' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = -1$ .

(Жауабы:  $y = 1 + x - e^x$ .)

2.4.  $y''' - 4y' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = 4$ .

(Жауабы:  $y = e^{2x} - 1$ .)

2.5.  $y''' + y' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 1$ .

(Жауабы:  $y = 1 - \cos x - \sin x$ .)

2.6.  $y''' - y' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = 4$ .

(Жауабы:  $y = -4 + e^{-x} + 3e^{3x}$ .)

2.7.  $y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = 0$   $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 8.$

(Жауабы:  $y = 2e^{-x} - 4xe^{-x} - 4x^2e^{-x} - 2e^x.$ )

2.8.  $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$   $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -14.$

(Жауабы:  $y = e^x - 3xe^x - e^{-3x}$ )

2.9.  $y''' + y'' = 0,$   $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1.$

(Жауабы:  $y = 1 - e^{-x}.$ )

2.10.  $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0,$   $y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0.$

(Жауабы:  $y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{5}{8}xe^{2x}.$ )

2.11.  $y''' + 3y'' + 2y' = 0,$   $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 2.$

(Жауабы:  $y = 1 - 2e^{-x} + e^{-2x}.$ )

2.12.  $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0,$   $y(0) = -1, y'(0) = 0, y''(0) = 1.$

(Жауабы:  $y = -e^{-x}(1+x).$ )

2.13.  $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0,$   $y(0) = -2.5, y'(0) = 0, y''(0) = 0.$

(Жауабы:  $y = -\frac{45}{26}e^{2x} - \frac{10}{13}\cos 2x + \frac{15}{13}\sin 2x.$ )

2.14.  $y''' + 9y' = 0,$   $y(0) = 0, y'(0) = 9, y''(0) = -18.$

(Жауабы:  $y = -2 + 2\cos 3x + 3\sin 3x.$ )

2.15.  $y''' - 13y'' + 12y' = 0,$   $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 133.$

(Жауабы:  $y = 10 - 11e^x + e^{12x}.$ )

2.16.  $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0,$   $y(0) = -2, y'(0) = 1, y''(0) = 2, y'''(0) = 0.$

(Жауабы:  $y = -e^x - \frac{7}{3}e^{-x} + \frac{7}{12}e^{2x} + \frac{3}{4}e^{-2x}.$ )

2.17.  $y^{IV} - 10y'' + 9y = 0,$   $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 8, y'''(0) = 24.$

(Жауабы:  $y = -2e^x + e^{-x} + e^{3x}.$ )

2.18.  $y''' - y'' + y' - y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 0$ .

(Жауабы:  $y = \sin x$ .)

2.19.  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 4$ .

(Жауабы:  $y = 2x^2 e^x$ .)

2.20.  $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = -6$ .

(Жауабы:  $y = -2e^x + \cos 2x + \sin 2x$ .)

2.21.  $y^{IV} - 2y'' + 9y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 1$ ,  $y'''(0) = 2$ .

(Жауабы:  $y = 1 - e^x + xe^x$ .)

2.22.  $y^{IV} - y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 0$ ,  $y'''(0) = -4$ .

(Жауабы:  $y = e^{-x} - e^x + 2 \sin x$ .)

2.23.  $y^{IV} - 16y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 0$ ,  $y'''(0) = -8$ .

(Жауабы:  $y = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}\sin 2x$ .)

2.24.  $y''' + y'' - 4y' - 4 = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 12$ .

(Жауабы:  $y = e^{2x} + 3e^{-2x} - 4e^{-x}$ .)

2.25.  $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -3$ ,  $y''(0) = -9$ .

(Жауабы:  $y = \cos 3x - \sin 3x$ .)

2.26.  $y^{IV} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,

$y''(0) = 0$ ,  $y'''(0) = 0$ ,  $y^{IV}(0) = 27$ .

(Жауабы:  $y = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 - e^{3x} + xe^{3x}$ .)

2.27.  $y''' + 2y'' + y' = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = -3$ .

(Жауабы:  $y = 1 - e^{-x} + xe^{-x}$ .)

2.28.  $y''' - y'' - y' + y = 0$ ,  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 1$ .

(Жауабы:  $y = -4e^x + 7xe^x + 3e^{-x}$ .)

2.29.  $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4, y''(0) = -1, y'''(0) = -16.$

(Жауабы:  $y = 2 \sin 2x + \cos x$ .)

2.30.  $y^{IV} + 10y'' + 9y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3, y''(0) = -9, y'''(0) = -27.$

(Жауабы:  $y = \sin 3x + \cos 3x$ .)

**3. Дифференциалдық теңдеуді тұрақтыларды вариациялау әдісімен шешу керек.**

3.1.  $y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$

(Жауабы:  $y = \left( -\frac{e^x}{2} + \frac{1}{2} \ln(e^x + 1) + C_1 \right) e^{-x} + \left( \frac{1}{2} \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + C_2 \right) e^x.$ )

3.2.  $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$

(Жауабы:  $y = \left( \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + C_1 \right) \cos 2x + \left( \frac{1}{2} x + C_2 \right) \sin 2x.$ )

3.3.  $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$

(Жауабы:  $y = (\ln |\cos 2x| + C_1) e^{2x} \cos x + (x + C_2) e^{2x} \sin x.$ )

3.4.  $y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$

(Жауабы:  $y = \frac{1}{\cos x} + C_1 + (\ln |\cos x| + C_2) \cos x + (x - \operatorname{tg} x + C_3) \sin x.$ )

3.5.  $y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}.$

(Жауабы:  $y = \left( -\frac{1}{3} x + C_1 \right) \cos 3x + \left( \frac{1}{9} \ln |\sin 3x| + C_2 \right) \sin 3x.$ )

3.6.  $y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}.$